Jakša Markotić
Getaldićeva 21, 21000 Split
Tel: 021 462 547
Mob: 091 158 9203
III. Gimnazija, Split

Rjesenje nagradnog zadatka

Kuglica je upala u aluminijsku cijev duljine h.

U pocetnom trenutku kuglica se nalazi na visini $l\sin(\frac{p}{6})=\frac{1}{2}l$.

Nakon sto potegnemo letvicu O, kuglica pocne slobodno padati prema dolje a pritom horizontalna komponenta njezine brzine ostaje 0 m/s. (vertikalni hitac)

Neka je T trenutak kada metalni V nosac udara o podlogu i zaustavlja se.

Metalni nosac se pocne okretati oko osovine jer na njega sada djeluje moment sile teze (koji vise nije uravnotezen niti jednim drugim momentom), koji u pocetnom trenutku iznosi $\frac{1}{2}l\cos(\frac{p}{6})*mg$, a naraste do $\frac{1}{2}l*mg$ u trenutku T. (m je masa metalnog nosaca, l je njegova duzina)

Neka je cijev postavljena na udaljenosti $l*\cos(\frac{p}{6})$ od osovine.
Kuglica ne moze upasti u cijev prije trenutka T jer ce se tek u trenutku T cijev nalaziti tocno ispod kuglice. Dakle, prvo metalni nosac padne, a za to isto vrijeme kuglica napravi neki put x. Tada je maksimalna duljina cijevi $h=\frac{1}{2}l-x=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}gT^2$.

U pocetnom trenutku nosac ima neku gravitacijsku potencijalnu energiju $E_{p\,start}=mg\frac{l}{4}$. U svakom trenutku do trenutka T vrijedi:
$E_k+E_p=E_{p\,start}$.
Napisimo E_p kao funkciju kuta kojeg nosac zatvara s horizontalom u odredjenom trenutku:
$E_p=mg\frac{l}{2}\sin j$.
Sada je:
$E_k=E_{p\,start}-E_p$,

$$\frac{1}{2} I w^2 = mg \frac{l}{4}(1 - 2\sin j),$$

$$\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3} w^2 = mg \frac{l}{4}(1 - 2\sin j),$$

$$w = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}(1 - 2\sin j)}.$$

Vrijeme T mozemo naci zbrajanjem vrlo malih intervala t_i.

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta j}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}\frac{p}{6}}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}(1 - 2\sin j_i)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}\frac{p}{6}}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}(1 - 2\sin j_i)}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}\frac{1}{k}\frac{p}{6}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin j}}$$

Slijedi:

$$h = \frac{1}{2} l - x = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} g T^2,$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{2} - \frac{x}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{g\left(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}\frac{1}{k}\frac{p}{6}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin j}}\right)^2}{2l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\frac{p}{6}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin j}}\right)^2.$$

Taj izraz evaluiramo kompjutorskim programom. Izvorni kod programa je prilozen na zadnjoj stranici ovog dokumenta.

$$\frac{h}{l} \approx 0.11245336.$$

Ako je cijev postavljena na udaljenosti manjoj od $l * \cos(\frac{p}{6})$, kuglica nece upasti u cijev jer se kuglica i vrh cijevi sigurno nikada nece susresti.

Ako je cijev postavljena na udaljenosti vecoj od $l * \cos(\frac{p}{6})$, njezina duljina sigurno mora biti manja od dosadasnjeg najboljeg rjesenja (0.112353) jer vec za tu duljinu, vrh cijevi ce u svakom trenutku do trenutka T imati akceleraciju, pa tako i brzinu vecu od kuglice, pa upadanje kuglice u cijev nece biti moguce.

Dakle, trazeni omjer $\frac{h}{l}$ iznosi priblizno **0.112453**.

Vrh cijevi se na pocetku nalazi na visini:

$$x = l\cos\frac{p}{6}\sin\frac{p}{6} + \frac{h}{l} l \cos\frac{p}{6} \approx 0.530400 l,$$

sto je vise od pocetne visine kuglice $\frac{1}{2} l$.

Izvorni kod programa za evaluaciju sume:

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define FI_0 (M_PI / 6.0)
#define FI(I, N) ((double)(I) / (N) * FI_0)

double rijesi(int n)
{
     int i;
     double sum = 0;

     double korijen1;
     double korijen2;

     korijen1 = 1.0;

     for (i = 1; i <= n; i++) {
          korijen2 = sqrt(1.0 - 2.0 * sin(FI(i, n)));
          sum += 1.0 / (korijen1 + korijen2);
          korijen1 = korijen2;
     }

     return 0.5 - (4.0 * FI_0 * FI_0) / (3.0 * n * n) * sum *
sum;
}

int main(int argc, char **argv)
{
     if (argc != 2) {
          fprintf(stderr, "Usage: fz broj-koraka\n");
          return -1;
     }

     printf("%.8f\n", rijesi(atoi(argv[1])));

     return 0;
}
```