

Magična kuglica

Paško Županović*

Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije
Tselina 12, 21000 Split

I. ZADATAK

Izračunaj najveći omjera h/l , gdje je h visina aluminijske cijevi a l udaljenost od kuglice do osovine, kod kojeg će se još uvijek kuglica sa slike I pasti u aluminijsku cijev. Početni kut padanja je $\alpha_0 = 30^\circ$. Zanemari sva trenja, masu aluminijske cijevi, te udaljenost kuglice do vrha V nosača. Uzeti da su oba kraka V nosača homogena.

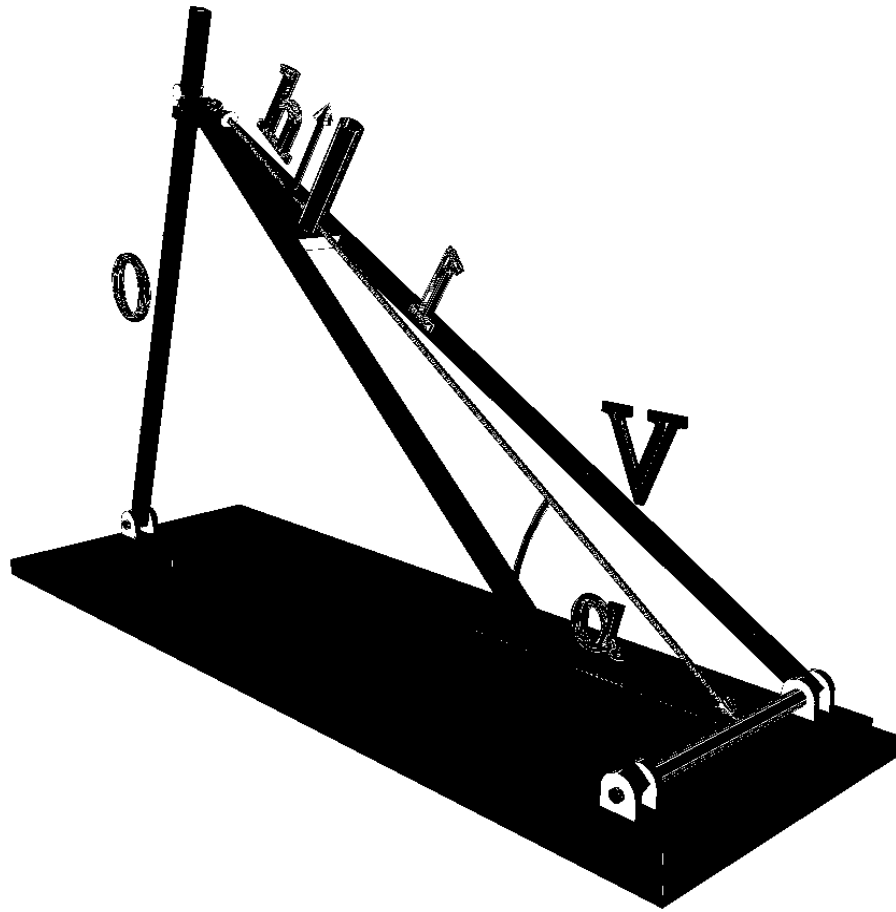


FIG. 1: Nosač i kuglica u početnom trenutku padanja. *Ispričavam se zbog nedostatka boja.*

*Electronic address: pasko@pmfst.hr

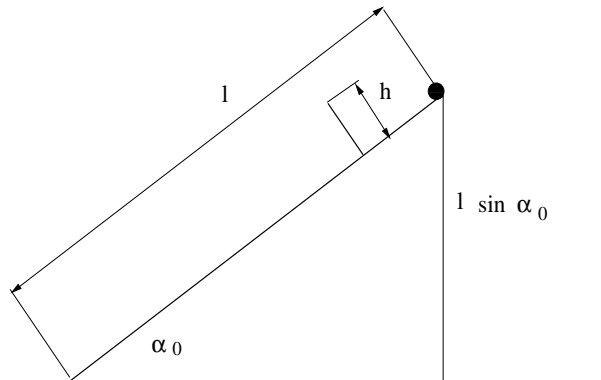


FIG. 2: Shematski prikaz uređaja sa slike I.

II. RJEŠENJE

A. Gibanje V nosača

Koristeći analogiju između translacionog i rotacionog gibanja kinetička energija rotacionog gibanja se može zapisati u obliku

$$E_R = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Ovdje su I i ω moment tromosti nosača oko točke T i njegova kutna brzina. Moment tromosti V nosača jednak je homogenom štapu iste mase i dužine koji se okreće oko kraja i jednak je $I = ml^2/3$ gdje su m i l masa, odnosno dužina V nosača.

Potencijalna gravitacijska energija jednaka je potencijalnoj energiji materijalne točke mase koja je jednak masi nosača koja se nalazi u njegovom centru mase,

$$E_P = mgl \sin \alpha. \quad (2)$$

Ovdje je α kut koji V nosač zatvara s horizontalnom podlogom.

Prema zakonu o sačuvanju mehaničke energije zbroj kinetičke energije rotacionog gibanja i potencijalne gravitacijske energije V nosača na početku, $\alpha = \alpha_0$ jednak je istom zbroju pri nekom kutu α ,

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgl(\sin \alpha - \sin \alpha_0). \quad (3)$$

Kutna brzina je prva derivacija kuta po vremenu,

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (4)$$

Iz jednačbi (3) i (4) dobije se kutna brzina nosača pri kutu α

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{l}} \sqrt{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}. \quad (5)$$

Minus ukazuje da je smjer povećanja brzine popraćen smanjnjem kuta otklona nosača od podloge. Vrijeme pada nosača od početnog kuta α_0 do podloge, $\alpha = 0$, dobije integriranjem gornje jednačbe,

$$t = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_{\alpha_0}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}}. \quad (6)$$

B. Gibanje kuglice

Kuglica vrši slobodan pad s visine $l \sin \alpha_0$ (vidi Sliku 2.). Da bi kuglica upala u cijev visine h ona mora prevaliti put $l \sin \alpha - h$ dok nosač prebriše kut α_0 . Vrijeme padanja kuglice je

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g} \left(\sin \alpha_0 - \frac{h}{l} \right)}. \quad (7)$$

C. Uvjet padanja kuglice u cijev visine h

Izjednačimo (6) i (7) dobijemo

$$\frac{h}{l} = \sin \alpha_0 - \frac{1}{6} \left(\int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} \right)^2 \quad (8)$$

Numerička integracija pomoću matematičkog paketa programa Mathematica za $\alpha_0 = 30^\circ$ daje

$$\left(\frac{h}{l} \right)_{max} = 0.112453. \quad (9)$$

III. Približno rješenje za male kutove i kvalitativno tumačenje efekta

U slučaju malih kutova uzimamo $\sin(\alpha) = \alpha$ (*rad*) i $\cos(\alpha) = 1$. Tada se svaka točka nosača približno giba po pravcu koji je okomit na površinu Zemlje (vidi sliku 3). Zanimarimo li dimenzije kuglice i aluminijske cijevi možemo uzeti da su obje udaljene za l od točke okretanja nosača.

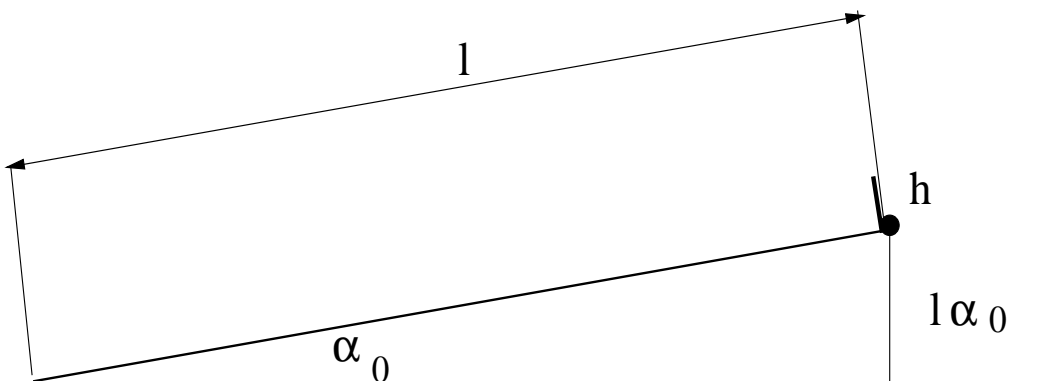


FIG. 3: Nosač s kuglicom s malim početnim kutom padanja.

Na nosač djeluje moment sile $M = mgl/2$. Prema II Newtonovom zakonu za rotaciono gibanje kutnom ubrzanje nosača je,

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{3g}{2l}. \quad (10)$$

Vrh nosača ubrzanje se s tangencijalnim ubrzanjem $a_V = \alpha l = 3g/2$. Ubrzanje vrha nosača je veće od ubrzanja sile teže pa kuglica zaostaje za vrhom nosača to se vidi na filmskom zapisu pokusa (http://www.fdst.hr/magicna_kuglica.htm#Filmski), Kut α_0 nosač prebriše za vrijeme t koje je dano izrazom,

$$\alpha_0 = \frac{3g}{4l} t^2. \quad (11)$$

Vrh nosača pri tom pređe put

$$\alpha_0 l = \frac{3}{4} g t^2. \quad (12)$$

Za vrijeme t kuglica slobodno pada i da bi upala u cijev treba prevaliti put (vidi Sliku 3)

$$s_k = \alpha_0 l - h = \frac{1}{2} g t^2. \quad (13)$$

Pomoću (12) gornja jednažba postaje

$$\alpha_0 l - h = \frac{2}{3} \alpha_0 l \quad (14)$$

ili

$$h = \frac{1}{3} \alpha_0 l, \quad (15)$$

pa je

$$h/l = \frac{1}{3} \alpha_0 \quad (16)$$

najveći mogući omjer za koji će kuglica upasti u aluminijsku cijev.