FD-ST **Fizikalno društvo Split i studij Inženjerske fizike PMF-a u Splitu**

Nagradni eksperimentalno-teorijski zadatak „Prijeko bliže okolo prije“

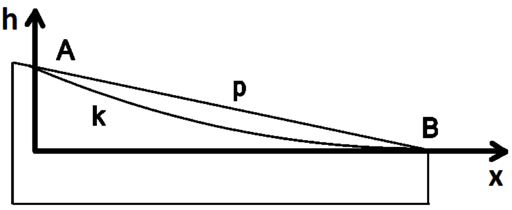
Predložak za odgovore

Šifra	Coloratus	
E-mail adresa	koloratus@hotmail.com	
Škola	III. gimnazija, Split	

	PITANJA I ODGOVORI	Max. bodova
1.	Stiže li kuglica od točke **A** do točke **B** prije po kraćem (**p**) ili dužem (**k**) putu? Kuglica stiže prije po dužem putu (**k**) u slučaju da je početak puta **k** dovoljno strmiji od kosine (nagib tangente na dužu putanju veći od kuta kosine).	5
2.	Eksperimentom provjerite svoju tvrdnju. Na vrh kinematičke klupe, koju smo dobili u školi, stavio sam dvije kuglice. Spustio sam „zaustavnik“ (plastična letvica koja pomaže da pustimo obje kuglice istodobno i to bez ikakve početne brzine) i otpustio ga. Kuglice su krenule, no kuglica koja putuje dužim putem stigla je prva, budući da je u početku dosta brzo ubrzala. Zatim sam postavio kuglice na drugi „zaustavnik“, na visini manjoj nego u prvom slučaju, no tad se dogodilo suprotno. Kuglica po dužem putu nije stigla dovoljno ubrzati te ju je kuglica sa kosine pretekla. Ista stvar se dogodila i s trećim „zaustavnikom“ – kuglica sa puta **p** je prije stigla.	5
3.	U kojem su međusobnom odnosu brzine kojima stižu kuglice iz točke **A** u točku **B** ako se gibaju po putanjama **p** i **k**? Brzine kuglica koje se gibaju putanjama **p** i **k** su (ako zanemarimo rad trenja) – jednake.	10

4.	Obrazloži odgovor. Naime, iz zakona očuvanja energije imamo: $E_{pot.} = E_{kin.} + E_{rot.}$ (1) Tj, na početku kuglica miruje i ima potencijalu energiju mgh , gdje je h_0 razlika visina točaka **A** i **B**. Kad loptica dođe do točke B, ima translacijsku kinetičku energiju $\frac{mv^2}{2}$ i rotacijsku energiju $\frac{I\omega^2}{2}$. Budući da imamo relaciju $\omega = \frac{v}{\rho}$, gdje je $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$ – radijus kružnice po kojoj se kugla promjera $2R = 15mm$ kotrlja po žlijebu. Uoči da kuglica samo dodiruje ivice kosina koje su udaljene za $d = 5mm$. Znamo da moment tromosti kugle iznosi $I_k = \frac{2}{5}mR^2$, možemo sve uvrstiti u (1): $mg\mathbf{h_0} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\frac{R^2}{\rho^2}$, i dobijemo: $v = \sqrt{\frac{2g\mathbf{h_0}}{1 + \frac{2}{5\left(1 - \frac{d^2}{4R^2}\right)}}}$ (2) Vidimo da brzina kuglice koja prevali vertikalni put h, ima brzinu translacije centra v koja ne ovisi o: - radijusu kugle - masi kugle - putu koji je ona prešla. Budući da su se kuglice na početku nalazile na istoj visini, zaključujemo da će i njihove brzine biti jednake. Zbog jednostavnosti član $\frac{d^2}{4R^2} = 0{,}11^{\bullet}$ možemo zanemariti u odnosu na jedinicu. Ova aproksimacija unosi grešku veličine 1%. Sada brzina postaje $v = \sqrt{\frac{10g\mathbf{h_0}}{7}}$.	20

Iz (2) možemo zaključiti i zašto kuglica sa puta **k** prije dođe do kraja. Naime, ako postavimo koordinatni sustav ovako:



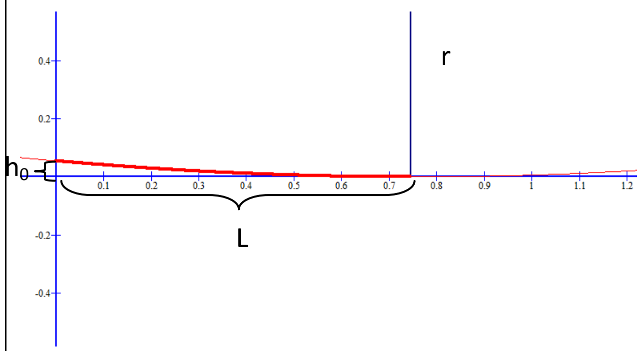
tada možemo prikazati brzinu v u ovisnosti o horizontalnom pomaku kuglica x ako prikažemo visinu h koju kuglica pređe u ovisnosti o x.

Za kosinu, iz pravokutnog trokuta vidimo da je $\tan\alpha = \frac{h(x)}{x}$, odnosno $h(x) = x\tan\alpha$, gdje je α kut kosine i njega možemo izračunati iz relacije $\tan\alpha = \frac{h_0}{L}$ (L – horizontalna duljina između točaka **A** i **B**). Dakle, za kosinu:

$$v(x) = \sqrt{\frac{10}{7} g x \tan\tan^{-1}\frac{h_0}{L}} \quad (3)$$

Za put **k** ćemo aproksimirati da se radi o pomaknutoj polukružnici radijusa r danoj jednadžbom:

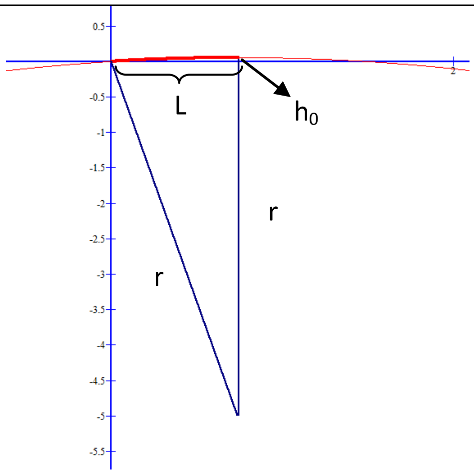
$$r^2 = (x-L)^2 + (y-r)^2 \quad (4)$$



Tada vertikalna visina h(x) koju pređe kuglica se mijenja također po kružnici:

$$r^2 = (x-L)^2 + \left(h(x) - \sqrt{r^2 - L^2}\right)^2 \quad (5)\text{, odnosno}$$

$$h(x) = \sqrt{r^2 - (x-L)^2} - \sqrt{r^2 - L^2}\text{. } (6)$$



Iz dobivenog pravokutnog trokuta sa grafa možemo napisati Pitagorin poučak:

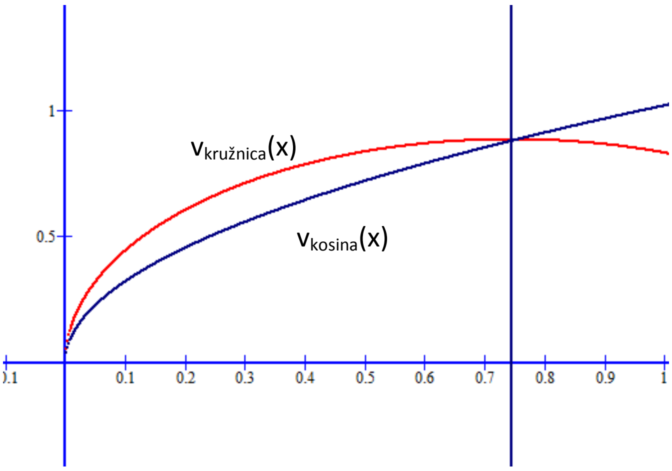
$r^2 = (r - h_0)^2 + L^2$, odnosno

$$r = \frac{h_0^2 + L^2}{2h_0}. \quad (7)$$

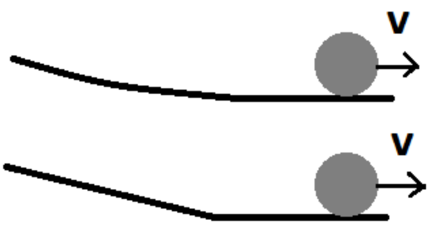
Sada možemo napisati izraz za v(x) za put **k**:

$$v(x) = \sqrt{\frac{10}{7} g \left(\sqrt{r^2 - (x-L)^2} - \sqrt{r^2 - L^2}\right)}. \quad (8)$$

Kad nacrtamo grafove funkcija (3) i (8) u istom koordinatnom sustavu, vidimo da su na udaljenosti x, tj. kad se razlika visina u slučaju kosine i kružnice poklopi i brzine jednake:



Isto tako vidimo na je brzina kuglice po putu **k** u

	početku veća, a time je i površina ispod krivulje veća, a kako je površina ispod krivulje brzine zapravo pređeni put, kuglica pređe veći put za isto vrijeme u odnosu na put **p**. Odnosno za isti put preći, potrebno joj je manje vremena.	
5.	Predloži i napravi eksperiment kojim ćeš provjeriti svoj odgovor na prethodno pitanje. Izvrši 3 mjerenja i iskaži rezultat mjerenja s pripadajućom pogreškom. Napravio sam jednostavni eksperiment pomoću kojeg sam zaključio da su brzine kuglica jednake. Naime, samo sam puštao kuglice s najveće visine, maknuo zadnji „zaustavnik“ i pustio da kuglice slete s klupe. Mjerio sam udaljenost od kraja klupe do mjesta na koje je kuglica pala. To sam činio tako da sam ispod klupe postavio papir i iznad njega indigo papir, tako da kad kuglica padne, ostavi trag. Tu udaljenost sam izmjerio 3 puta za put **p** i 3 puta za put **k**. Kad kuglice „slete“ s klupe, imaju samo komponentu brzine na x-osi zbog kratke zaravni pri kraju klupe:  Da nije te zaravni,vektor brzine ne bi bio paralelan s x-osi te bi brzinu trebali rastavljati na komponente. Budući da je riječ o brzini horizontalnog smjera, vrijede formule za horizontalni hitac: $x = vt$ (9), Gdje je x horizontalna duljina šo je kuglica pređe i koju sam ja mjerio. U smjeru y-osi ima akceleracije i to zemljine, pa vrijedi: $h_0 = g\frac{t^2}{2}$ (10).	60

	Kombiniranjem (9) i (10) u jednu jednadžbu dobijemo: $x = v\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ (11). Budući da se traži odnos dvije brzine, traži se omjer, tj: $\frac{v_p}{v_k} = \frac{x_p}{x_k} = k$. (12)	

Br	x_p/cm	x_k/cm	k
1	19,2	19,0	1,0105
2	19,3	18,8	1,0265
3	18,9	19,1	0,9895

RAČUN GREŠKE:

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{3} k_i / 3 = 1{,}0088$$

$$\Delta k_1 = |\bar{k} - k_1| = 0{,}0017$$
$$\Delta k_2 = |\bar{k} - k_2| = 0{,}0168$$
$$\Delta k_3 = |\bar{k} - k_3| = 0{,}0193$$

$$k = \bar{k} \pm \Delta k = 1{,}0088 \pm 0{,}0193$$

Konačni zaključak je:

$$\frac{v_p}{v_k} = k \approx 1$$
$$v_p \approx v_k$$

Odnosno, da brzine koje kuglice imaju na kraju klupe doista jesu jednake.

6.	Ukupno bodova	100